Title	Derived Fourier series ノ Absolute Summability (A) ニツイテ
Author(s)	高橋, 龍夫
Citation	全国紙上数学談話会. 10 p.none-p.none
Issue Date	1934-09-07
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73865
rights	
Note	

28. Derived Fourier series ノ Absolute Summability (A) ニツイテ

高橋龍夫（東北大）

紙上談話会第7号デ佐藤徳意氏ガ $f(\theta)$ ノ derived Fourier series

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n\cos n\theta - a_n\sin n\theta)$$

ノ absolute Summability (A) ヲ研究サレテヰル。ソシテ (1) ガ absolutely summable (A) ナル為メノ充分條件トシテ

$$(2)\quad \int_0^\delta \frac{|\psi(t)|}{t^2}dt\ (\delta>0)\quad コヽニ\ \psi(t)=f(\theta+t)-f(\theta-t)$$

ノ existence ヲ証明サレタ。ソノ証明ハ (1) ヨリ作ッタ Poisson sum ヲ直接計算シテヤラレテヰル。今年ノ Proc. Edinburgh Math. Soc. (part 1) デ L. S. Bosanquet ガ通常ノ Fourier series ノ absolute Summability ニ対シテ J. M. Whittaker, B. N. Prasad 等ヨリモ一般ノ條件ヲ与ヘテヰル
今 derived Fourier series ニ付テノ吾々ノ問題ヲ Bosanquet ノヤッタ結果ガバツノ方法ニ帰着シヤウト試ミテ見ルト (2) ヨリモモット広イ條件ヲ与ヘル事ガ出来ル

今 $$\Psi_\alpha(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-u)^{\alpha-1}\psi(u)\,du,\quad \alpha>0$$

$$t^{-\alpha}\Psi_\alpha(t)=\psi_\alpha(t),\quad \psi_0(t)=\psi(t)\ トオク。$$

(2) ヨリモ $\int_0^\delta \frac{|\psi_\alpha(t)|}{t^2}dt$ ノ existence ノ方ガ一般ナ事ハ明ラカデアル ($\alpha>1$ ナラバ)

又

$$\int_0^\delta \left|\frac{d\left(\frac{\psi_{\alpha+1}(t)}{t}\right)}{dt}\right|dt \leqq \int_0^\delta \frac{|\psi'_{\alpha+1}(t)|}{t}dt+\int_0^\delta \frac{|\psi_{\alpha+1}(t)|}{t^2}dt$$

$$=\alpha\int_0^\delta \frac{|\psi_\alpha(t)-\psi_{\alpha+1}(t)|}{t}dt+\int_0^\delta \frac{|\psi_{\alpha+1}(t)|}{t^2}dt$$

デアルカラ α ヲ fix シナケバ $\int_0^\delta \frac{|\psi_\alpha(t)|}{t}dt$ ノ existence ヨリモ $\frac{\psi_\alpha(t)}{t}$ ガ $(0,\delta)$ デ bounded varition ノ函数デアルトイフ事ノ方ガ広イ。リコデ筆者ハ之ガ充分條件ニナル事ヲ示サウ。($\frac{\psi_\alpha(t)}{t}$ ガ bounded variation ナラバ $\frac{\psi_\beta(t)}{t}$ (但シ $\beta>\alpha$) 又左様ナル事ハ Bosanquet ヨリ分ッテヰル。) 即チ

定理. $\frac{\psi_\alpha(t)}{t}$ ガ $(0,\delta)$ デ bounded variation ノ函数ニナル如キ α ガアレバ (1) ハ absolutely summable (A) デアル。

証明スベキ事ハ $\int_0^1 \left| \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\pi \psi(t)\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}\,dt \right| dx$ ノ存在デアル。

之ニハ、$\int_0^1 \left| \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\eta \psi(t)\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}\,dt \right| dx$ $\left(0<\eta<\frac{\pi}{2}\right)$ ノ existence サヘ云ヘバヨイ。今

$$K(x,t)=K=\frac{1-x^2}{1-2x\cos t+x^2}$$

$$M(x,t)=M=\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}$$

トオクト

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=-2\frac{\partial K}{\partial t}-2x\frac{\partial^2 K}{\partial x\partial t}$$

トナル事カラ 吾々ノ問題ニオイテ Mヲ含ム計算ガ Kヲ含ム計算ニ reduce サレル。

$$\int_0^1 \left| \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\eta \psi(t)\frac{x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}\,dt \right| dx$$

$$\leqq 2\int_0^1 \left| \int_0^\eta \psi(t)\frac{\partial K}{\partial t}\,dt \right| dx + 2\int_0^1 \left| \int_0^\eta \psi(t)\frac{\partial^2 K}{\partial x\partial t}\,dt \right| dx$$

(i) 第二ノ積分ハ Bosanquet ノ論文中ヨリノ添字ノ n ヲ $n+1$ デオキカヘ、途中ノ Ψ_n ハ Ψ_n デ又 explicit ニ出テ来ル $\phi_n(t)$ ハ $\frac{\psi_n(t)}{t}$ デオキカヘルト後ハ同ジデアル。

(ii) 第一ノ積分ヲ取扱フニモ Bosanquet ト同一ノ方法及ビ Estimation ガアテハマル。即チ

$$(3)\qquad \left| \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}K(x,t) \right| \begin{cases} \leqq A t^{-2-n} \\ \leqq A(1-x)^{-2}t^{-n} \end{cases}$$ (n ハ負ニナラヌ整数)

(実ハモウ少シ精密ニナルガ之デ充分デアル。) トシ (Bosanquet, Lemma 4)

$$\int_0^t K(x,u)\,du=O(t)$$ カラ (3) ヲ用ヒ、Induction ニヨルト

$$\int_0^t u^n\frac{\partial^n}{\partial u^n}K(x,u)\,du \begin{cases} \leqq A t^{-1} \\ \leqq A(1-x)^{-2}t \end{cases}$$

ガ得ラレ (i) ト全ク同様ナ置換ガ証明サレル。以上ノ定理ハ直接Mヲ含ム積分ヲ estimate シテモ出来ル筈デアルガ既ニKノ estimation ガアルノデ之ニ reduce シタノデアル